Appello del 12/06/2012

ESERCIZIO 1: Supponiamo che il processo di arrivo dei pacchetti su un router di Internet sia modellabile mediante la catena di Markov $X = \{X_n, n \in \mathrm{N}\}$ illustrata in Figura 1.1. Quando X visita lo stato $\{k\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, X emette k pacchetti. Il candidato:

1. discuta la natura degli stati di $X = \{X_n, n \in \mathrm{N}\}$ al variare di $q \in [0, 1]$;
2. nel caso di catena ricorrente positiva calcoli le probabilità stazionarie di stato $\{\pi_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ di X e tramite queste determini il numero medio $(E[A])$ di pacchetti emessi dal processo di arrivo;
3. calcoli $E[T_1|X_0 = 1]$ in funzione di $f_{1,1}^{(k)}$, $k \geq 1$ e, tramite il risultato ottenuto, discuta la natura della catena di Markov.

Posto $n = 3$ e $q = 1/3$, supponiamo che all'istante iniziale X si trovi nello stato $\{1\}$. Il candidato calcoli:

4. le probabilità che, dopo due transizioni consecutive a partire dall' istante iniziale, X visiti gli stati $\{1\}$, $\{2\}$, e $\{3\}$.

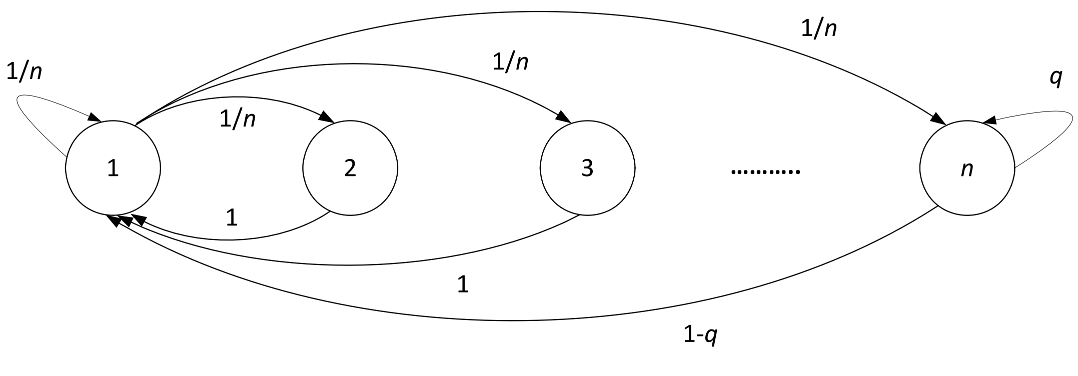

Figura 1.1: Diagramma delle probabilita' di transizione

RISOLUZIONE

1. Per $q = 1$ gli stati $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$ della catena sono transienti mentre lo stato $\{n\}$ è assorbente. Per $0 \leq q < 1$ tutti gli stati della catena comunicano tra loro. La catena è dunque irriducibile. Inoltre, la catena è aperiodica in quanto (ad esempio) lo stato $\{1\}$ è aperiodico.

2. Per $0 \leq q < 1$ la catena in esame è irriducibile ed aperiodica, per cui, essendo una catena finita, tutti i suoi stati sono ricorrenti positivi. La matrice delle probabilita' di transizione risulta

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-q & 0 & 0 & \dots & q \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Per calcolare le probabilita' stazionarie di stato $\pi_k,\ k \in \{1, 2, \dots, n\}$, della catena di Figura 1.1 consideriamo il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P \\ \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e} = 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

oppure, in forma estesa

$$\left[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\right] = \left[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-q & 0 & 0 & \dots & q \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1 \tag{1.4}$$

La (1.3) equivale al seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{n}\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_{n-1} + (1-q)\pi_n \\ \pi_2 = \frac{1}{n}\pi_1 \\ \pi_3 = \frac{1}{n}\pi_1 \\ \ldots \\ \pi_{n-1} = \frac{1}{n}\pi_1 \\ \pi_n = \frac{1}{n}\pi_1 + q\pi_n \end{cases} \tag{1.5}$$

Le equazioni del sistema (1.5) sono linearmente dipendenti per cui, scartata la prima equazione e ricavando dall' ultima equazione

$$\pi_n = \frac{1}{n(1-q)}\pi_1 \tag{1.6}$$

otteniamo il seguente sistema di equazioni lineari indipendenti

$$\begin{cases} \pi_2 = (1/n)\pi_1 \\ \pi_3 = (1/n)\pi_1 \\ \ldots \\ \pi_{n-1} = (1/n)\pi_1 \\ \pi_n = \{1/[n(1-q)]\}\pi_1 \end{cases} \tag{1.7}$$

Per calcolare π_1 utilizziamo la condizione di normalizzazione $\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1$ ovvero,

$$\pi_1\left[1 + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n(1-q)}\right] = 1 \tag{1.8}$$

con $n-2$ addendi $1/n$. Dalla (1.8) segue

$$\pi_1 = \frac{n(1-q)}{2(1-q)(n-1)+1} \tag{1.9}$$

Sostituendo la (1.9) in (1.6) si ottiene

$$\pi_j = \frac{1-q}{2(1-q)(n-1)+1}, \quad j = 2, 3, \ldots, n-1 \tag{1.10}$$

$$\pi_n = \frac{1}{2(1-q)(n-1)+1} \tag{1.11}$$

Per calcolare il numero medio di pacchetti emessi dal processo basta osservare che

$$E[A] = \sum_{k=1}^{n} E[A|\{k\}]P\{X=k\} = \sum_{k=1}^{n} k\pi_k \tag{1.12}$$

ed utilizzando le (1.8), (1.9), e (1.11) si ottiene

$$\begin{aligned} E[A] &= \frac{n(1-q)}{2(1-q)(n-1)+1} \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} i\left[\frac{1-q}{2(1-q)(n-1)+1}\right] \\ &+ \frac{n(1-q)}{2(1-q)(n-1)+1} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Conviene sviluppare il secondo addendo nel secondo memebro della (1.13) come segue

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n-1} i\left[\frac{1-q}{2(1-q)(n-1)+1}\right] &= \left[\frac{1-q}{2(1-q)(n-1)+1}\right]\left[\sum_{i=1}^{n-1} i - 1\right] \\ &= \left[\frac{1-q}{2(1-q)(n-1)+1}\right]\left[\frac{n(n-1)}{2} - 1\right] \end{aligned} \tag{1.14}$$

Sostituendo la (1.14) nella (1.13), dopo alcuni passaggi algebrici, otteniamo

$$E[A] = \frac{(1+n/2)(1-q)(n-1)+n}{2(1-q)(n-1)+1} \tag{1.15}$$

3. Dall' analisi del diagramma delle probabilita' di transizione della catena di Markov (Figura 1.1) e' semplice ricavare la funzione massa di probabilita' $f_{1,1}^{(k)}(k \geq 1)$ del tempo T_1 tra due visite successive della catena in k passi allo stato $\{1\}$. Infatti

$$f_{1,1}^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & k = 1 \\ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \dots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1-q}{n} & k = 2 \\ \dfrac{1}{n}q(1-q) & k = 3 \\ \dfrac{1}{n}q^2(1-q) & k = 4 \\ \dots & \dots \end{cases} \tag{1.16}$$

ossia

$$f_{1,1}^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & k = 1 \\ \dfrac{n-2}{n} + \dfrac{1-q}{n} & k = 2 \\ \dfrac{1}{n}q^{k-2}(1-q) & k \geq 3 \end{cases} \tag{1.17}$$

Utilizzando la (1.17)

$$\begin{aligned} E[T_1|X_0 = 1] &= \sum_{k=1}^{\infty} k f_{1,1}^{(k)} \\ &= \frac{1}{n} + 2\left(\frac{n-2}{n} + \frac{1-q}{n}\right) + \sum_{j=3}^{\infty} j\frac{1}{n}q^{j-2}(1-q) \\ &= \frac{1}{n} + 2\left(\frac{n-q-1}{n}\right) + \left(\frac{1-q}{n}\right)\left[q\sum_{h=1}^{\infty} hq^{h-1} + 2\sum_{h=1}^{\infty} q^h\right] \\ &= \frac{1}{n} + 2\left(\frac{n-q-1}{n}\right) + \left(\frac{1-q}{n}\right)\left[\frac{q}{(1-q)^2} + 2\sum_{h=0}^{\infty} q^h - 2\right] \end{aligned}$$

e, dopo alcuni passaggi algebrici,

$$E[T_1|X_0 = 1] = \frac{2(1-q)(n-1)+1}{n(1-q)} \tag{1.18}$$

Poiché $E[T_1|X_0 = 1] < \infty$, lo stato $\{1\}$ è ricorrente positivo. Poiché tutti gli stati della catena di Figura 1.1 comunicano tra loro allora tutti gli stati sono ricorrenti positivi. Un ulteriore risultato (non richiesto dall'esercizio) che si può dedurre dalla (1.18) è:

$$\pi_1 = \frac{1}{E[T_1|X_0 = 1]} = \frac{n(1-q)}{2(1-q)(n-1)+1} \qquad (1.19)$$

Ovviamente, la (1.19) coincide con la (1.8).

4. Per rispondere a questa domanda basta applicare l' equazione di Kolmogorov

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(0)} \cdot P^2 \qquad (1.20)$$

dove

$$\mathbf{p}^{(0)} = [1, 0, 0] \qquad (1.21)$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/9 & 2/9 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 4/9 & 2/9 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad (1.22)$$

Sostituendo la (1.21) e la (1.22) nella (1.20) otteniamo

$$[1, 0, 0] \begin{bmatrix} 2/3 & 1/9 & 2/9 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 4/9 & 2/9 & 1/3 \end{bmatrix} = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \qquad (1.23)$$

Quindi, le probabilita' che dopo due transizioni consecutive a partire dall' istante iniziale, X visiti gli stati $\{1\}$, $\{2\}$, e $\{3\}$, sono $2/3$, $1/9$ e $2/9$ rispettivamente.

NOTA. Si poteva pervenire allo stesso risultato ispezionando il grafo di Figura 1.2.

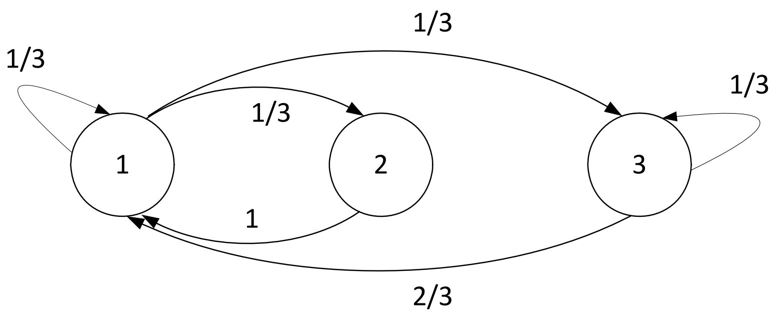

Figura 1.2: Diagramma di transizione nel caso n=3