ESERCIZIO 1: Si consideri un commutatore di una rete a pacchetto modellabile mediante un sistema M/M/1/K in grado di contenere tre pacchetti $(K = 3)$. Siano λ e μ i tassi costanti di arrivo e di servizio rispettivamente. Il candidato:

1. disegni il diagramma dei tassi di transizione;
2. scriva, per ogni stato, le equazione di bilanciamento globale e ricavi le probabilità stazionarie di stato;
3. ricavi il tasso di ingresso nel sistema (λ_s), il throughput (γ), l'offered load (a) ed il carried load (a');
4. calcoli il numero medio di pacchetti nel sistema $(E[N])$ ed il tempo medio di risposta $(E[R])$.

RISOLUZIONE

1. Il diagramma dei tassi di transizione è riportato in Figura 1.1.

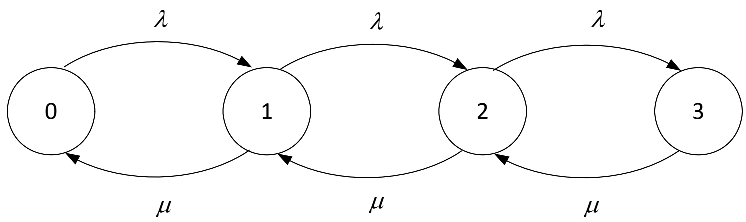

Figura 1.1: Diagramma dei tassi di transizione per M/M/1/K

2. Dalla Figura 1.1 è facile ricavare le equazioni di bilanciamento globale

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ (\lambda + \mu) p_1 = \lambda p_0 + \mu p_2 \\ (\lambda + \mu) p_2 = \lambda p_1 + \mu p_3 \\ \mu p_3 = \lambda p_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Posto $\rho = \lambda / \mu$, risolvendo il sistema (1.1) si ottiene

$$\begin{cases} p_1 = p_0 \rho \\ p_2 = p_0 \rho^2 \\ p_3 = p_0 \rho^3 \end{cases} \tag{1.2}$$

La probabilità stazionaria p_0 di trovare il sistema vuoto si ricava dalla condizione di normalizzazione

$$p_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3) = 1 \tag{1.3}$$

ossia

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{3} \rho^i} \tag{1.4}$$

Di conseguenza

$$p_0 = \begin{cases} 1/4 & \rho = 1 \\ \dfrac{1-\rho}{1-\rho^4} & \rho \neq 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

Sostituendo la (1.5) nella (1.2) si ottiene

$$p_k = \begin{cases} 1/4 & \rho = 1,\, k \in \mathrm{N} \\ \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^4}\right)\rho^k & \rho \neq 1,\, k \in \mathrm{N} \end{cases} \tag{1.6}$$

3. Il tasso di ingresso nel sistema λ_s risulta

$$\lambda_s = \lambda(1 - P_L) \tag{1.7}$$

dove P_L è la packet loss probability, ovvero la probabilità che un pacchetto in arrivo trovi 3 pacchetti nel sistema e quindi non venga accettato nel sistema stesso (perciò la probabilità che un pacchetto in arrivo venga scartato). Utilizzando la (1.6) si ottiene

$$P_L = p_3 = \begin{cases} 1/4 & \rho = 1 \\ \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^4}\right)\rho^3 & \rho \neq 1 \end{cases} \tag{1.8}$$

Sostituendo la (1.8) nella (1.7) si ottiene

$$\lambda_s = \begin{cases} (3/4)\lambda & \rho = 1 \\ \left(\dfrac{1-\rho^3}{1-\rho^4}\right)\lambda & \rho \neq 1 \end{cases} \qquad (1.9)$$

Poiché il tasso di servizio è costante (indipendente cioè dal numero di pacchetti nel sistema), il throughput è dato da

$$\gamma = \mu(1 - p_0) \qquad (1.10)$$

Sostituendo le (1.5) nella (1.10) si ottiene

$$\gamma = \begin{cases} (3/4)\mu & \rho = 1 \\ \left(\dfrac{1-\rho^3}{1-\rho^4}\right)\mu & \rho \neq 1 \end{cases} \qquad (1.11)$$

Dal confronto della (1.9) con la (1.11) si deduce che $\gamma = \lambda_s$. Questo era prevedibile in quanto i pacchetti che vengono accettati dal sistema, dopo essere stati serviti, lasciano il sistema stesso.

L' offered load (a) ed il carried load (a') sono dati da

$$a = \lambda/\mu \qquad (1.12)$$

$$a' = \lambda_s/\mu \qquad (1.13)$$

Per ricavare la relazione tra offered e carried load basta moltiplicare entrambi i membri della (1.7) per $1/\mu$ e tenere conto delle (1.12) e (1.13).

$$a' = a(1 - P_L) \qquad (1.14)$$

4. Per calcolare il numero medio di pacchetti nel sistema si parte dalla definizione

$$E[N] = \sum_{n=1}^{3} np_n = p_0\sum_{n=1}^{3} n\rho^n = p_0(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3) \qquad (1.15)$$

Sostituendo (1.5) nella (1.15)

$$E[N] = \begin{cases} 6/4 & \rho = 1 \\ \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^4}\right)(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3) & \rho \neq 1 \end{cases} \tag{1.16}$$

Per calcolare il tempo medio di risposta $E[R]$ si applica il risultato di Little.

$$E[R] = \frac{E[N]}{\gamma} = \begin{cases} 2/\mu & \rho = 1 \\ \dfrac{(1-\rho)}{\mu(1-\rho^3)}(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3) & \rho \neq 1 \end{cases} \tag{1.17}$$