Appello del 23/07/2012

ESERCIZIO 1: Un commutatore di una rete a pacchetto viene modellato mediante un sistema a coda M/M/1 *speciale* nel quale i pacchetti arrivano con tasso $\lambda_n = (n+1)\lambda$ e vengono serviti con tasso $\mu_n = (n+1)\mu$, $\forall n \in \mathrm{N}$, dove *n* rappresenta il numero di pacchetti nel sistema. Il candidato:

1. disegni il diagramma dei tassi di transizione;
2. ricavi la condizione di stabilità del sistema e, per un sistema stabile, le probabilità stazionarie di stato utilizzando le equazioni di bilanciamento locale.
3. calcoli il numero medio di pacchetti nel sistema $E[N]$ ed in coda di attesa $E[N_q]$, il tasso "medio" complessivo $\bar{\lambda}$ dei pacchetti in ingresso al sistema a coda, il throughput γ, la distribuzione $\{r_j, j \in \mathrm{N}\}$ osservata dai pacchetti in arrivo, il tempo medio di risposta del sistema $E[R]$ ed il tempo medio in coda di attesa $E[W]$;
4. calcoli il carried load a', il tempo medio di servizio b e l' offered load a.

NOTA. Nel corso degli sviluppi algebrici necessari allo svolgimento dell'esercizio può essere utile ricordare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -log(1-x)\,,\ 0 < x < 1 \qquad (1.1)$$

RISOLUZIONE

1. Il diagramma dei tassi di transizione è illustrato in Figura 1.1.
2. Le equazioni di bilanciamento locale risultano

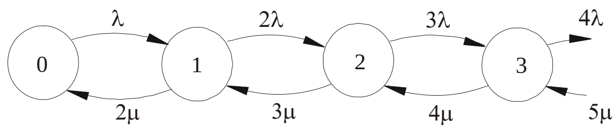

Figura 1.1: Diagramma dei tassi di transizione

$$\begin{cases} \lambda p_0 = 2\mu p_1 \\ 2\lambda p_1 = 3\mu p_2 \\ 3\lambda p_2 = 4\mu p_3 \\ \dots \\ (k+1)\lambda p_k = (k+2)\mu p_{k+1} \end{cases} \tag{1.2}$$

Per $k = 0$, dal sistema (1.2) si ha

$$p_1 = \frac{\lambda}{2\mu} p_0 \tag{1.3}$$

mentre per $k = 1$

$$p_2 = \left(\frac{2\lambda}{3\mu}\right) p_1 \tag{1.4}$$

Sostituendo la (1.3) nella (1.4)

$$p_2 = \left(\frac{2\lambda}{3\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right) p_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 \tag{1.5}$$

Per $k = 2$, dal sistema (1.2) e dalla (1.5) si ha

$$p_3 = \left(\frac{3\lambda}{4\mu}\right) p_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \tag{1.6}$$

In generale si ha

$$p_k = \frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, \ \forall k \in \mathrm{N} \tag{1.7}$$

Ponendo per brevità

$$\alpha = \lambda / \mu \tag{1.8}$$

la (1.7) può essere riscritta

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k+1} p_0, \ \forall k \in \mathrm{N} \tag{1.9}$$

Come è noto, la probabilità p_0 si ricava dalla condizione di normalizzazione $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k+1} p_0 = 1 \tag{1.10}$$

La (1.10) può essere trasformata come segue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k+1} p_0 = \frac{p_0}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1}}{k+1} = \frac{p_0}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k} \tag{1.11}$$

Dalla (1.11) segue anche la condizione di stabilità. Infatti se $\alpha < 1$, ossia se $\lambda < \mu$ la serie che compare nella (1.11) converge e dalla (1.1) abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} = -log(1-\alpha) \tag{1.12}$$

Sostituendo la (1.12) nella (1.11), e quest'ultima nella (1.10) si ottiene

$$p_0 = -\frac{\alpha}{log(1-\alpha)} \tag{1.13}$$

Sostituendo la (1.13) nella (1.9) si ottiene,

$$p_k = -\frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)log(1-\alpha)}, \ \forall k \in \mathrm{N} \tag{1.14}$$

3. Dalle (1.14) si deduce facilmente il numero medio di pacchetti in rete all'equilibrio statistico

$$E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = -\frac{1}{log(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \alpha^{k+1}$$

$$= -\frac{1}{log(1-\alpha)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right) \alpha^k = -\frac{1}{log(1-\alpha)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \alpha^k$$

$$= -\frac{1}{log(1-\alpha)} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^k - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k} \right\}$$

$$= -\frac{1}{log(1-\alpha)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k - \alpha - 1 - \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k} - \alpha \right] \right\} \tag{1.15}$$

Dopo semplici passaggi algebrici sulla (1.15) si perviene al risultato richiesto

$$E[N] = -1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)log(1-\alpha)} \tag{1.16}$$

$E[N_q]$ si può calcolare in maniera analoga ad $E[N]$. Infatti

$$E[N_q] = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)p_k = \sum_{k=1}^{\infty}kp_k - \sum_{k=1}^{\infty}p_k = E[N] - (1-p_0) \tag{1.17}$$

Sostitendo la (1.16) e la (1.13) nella (1.17), dopo alcuni pasaggi algebrici si perviene al seguente risultato

$$E[N_q] = -2 - \frac{\alpha(2-\alpha)}{(1-\alpha)log(1-\alpha)} \tag{1.18}$$

Per il calcolo del tasso complessivo $\bar{\lambda}$ in ingresso al sistema si procede partendo dalla definizione

$$\bar{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k p_k \tag{1.19}$$

Tenendo conto della (1.2)

$$\bar{\lambda} = \lambda\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p_k = \lambda(E[N]+1) \tag{1.20}$$

Sostituendo la Sostitendo la (1.16) nella (1.20), dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$\bar{\lambda} = -\frac{\lambda\alpha}{(1-\alpha)log(1-\alpha)} \tag{1.21}$$

Anche per calcolare il throughput γ si parte dalla definizione

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k p_k \tag{1.22}$$

Tenendo conto che $\mu_n = (n+1)\mu$ la (1.22) può essere riscritta

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} (n+1)\mu p_k = \mu\{E[N] + (1 - p_0)\} \tag{1.23}$$

Sostitendo la (1.16) e la (1.13) nella (1.23), dopo alcuni pasaggi algebrici si perviene al seguente risultato atteso (in quanto il sistema non perde pacchetti)

$$\gamma = \bar{\lambda} = -\frac{\lambda\alpha}{(1-\alpha)log(1-\alpha)} \tag{1.24}$$

Dalla teoria è noto che

$$r_j = \frac{\lambda_j p_j}{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k p_k} = \frac{\lambda_j p_j}{\bar{\lambda}}, \ \forall j \in \mathrm{N} \tag{1.25}$$

Utilizzando la (1.2), la (1.14) e la (1.21), dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$r_j = (1-\alpha)\alpha^j, \ \forall j \in \mathrm{N} \tag{1.26}$$

Dal confronto della (1.14) con la (1.26) risulta che le funzioni massa di probabilita' $\{r_k, k \in \mathrm{N}\}$ e $\{p_k, k \in \mathrm{N}\}$ differiscono tra loro. Questo risultato era prevedibile in quanto il tasso di arrivo dei pacchetti sul commutatore dipende dallo stato del (numero di pacchetti presenti nel) sistema per cui il teorema PASTA non è applicabile.

Per il calcolo di risposta del sistema $E[R]$ basta osservare che il numero medio di pacchetti nel sistema è dato dalla (1.16). Poichè il tasso globale di ingresso è fornito dalla (1.21), applicando il risultato di Little si ottiene

$$E[R] = \frac{E[N]}{\bar{\lambda}} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{(1-\alpha)log(1-\alpha)}{\alpha} + 1\right] \tag{1.27}$$

Per il calcolo di $E[W]$ si applica di nuovo il risultato di Little

$$E[W] = \frac{E[N_q]}{\bar{\lambda}} \tag{1.28}$$

Sostituendo la (1.17) e la (1.21) nella (1.28), dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$E[W] = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{2(1-\alpha)log(1-\alpha)}{\alpha} + (2-\alpha)\right] \tag{1.29}$$

NOTA. Poichè $E[W] = E[R] - b$, dal risultato (1.27) e dalla (1.29) si ha

$$b = -\frac{(1-\alpha)[log(1-\alpha)+\alpha]}{\lambda\alpha} \tag{1.30}$$

4. Per il calcolo di a' si applica la definizione di carried load tenendo presente che si ha un solo servente

$$a' = 1 - p_0 \tag{1.31}$$

Utilizzando la (1.13)

$$a' = 1 + \frac{\alpha}{log(1-\alpha)} \tag{1.32}$$

Poiché il carried load è anche fornito dalla seguente espressione

$$a' = \gamma b \tag{1.33}$$

il tempo medio di servizio b risulta

$$b = \frac{a'}{\gamma} \tag{1.34}$$

Utilizzando perciò la (1.32) e (1.23) si ottiene

$$b = -\frac{(1-\alpha)[log(1-\alpha)+\alpha]}{\lambda\alpha} \tag{1.35}$$

che coincide, come doveva, con la (1.30).
Poichè $a = \bar{\lambda}b$, utilizzando la (1.21) e la (1.35) si ottiene

$$a = 1 + \frac{\alpha}{log(1-\alpha)} \tag{1.36}$$

Quindi, confrontando la (1.32) con la (1.36) si deduce che $a' = a$. Questo risultato era atteso in quanto il sistema ha coda infinita e quindi non perde pacchetti. Di conseguenza il carried load e l’offered load, all’equilibrio statistico, debbono coincidere.