Appello del 18/09/2012

ESERCIZIO 1: Un router di una rete a pacchetto viene modellato mediante un sistema a coda M/M/1 *speciale* nel quale i pacchetti arrivano con tasso λ e vengono serviti con tasso μ. La specificità del sistema in esame consiste nel fatto che il diagramma dei tassi di transizione, riportato in Figura 1.1, è diverso da quello classico.

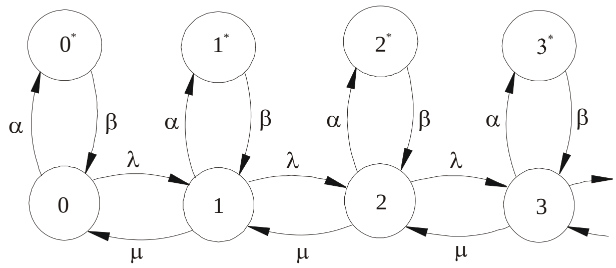

Figura 1.1: Diagramma dei tassi di transizione

Nel diagramma di Figura 1.1 i parametri α e β sono reali positivi e diversi da zero. Il candidato:

1. fornisca una interpretazione del comportamento del sistema in esame;
2. ricavi la condizione di stabilità del sistema e, per un sistema stabile, le probabilità stazionarie di stato utilizzando le equazioni di bilanciamento locale.

Per semplificare i calcoli, da ora in poi consideriamo il caso in cui $\alpha = \beta$. Il candidato:

3. calcoli il tasso λ_{acc} con cui i pacchetti vengono accettati dal sistema, la packet loss P_{Loss} ed il throughput γ e stabilisca la relazione tra il carried load a' e l' offered load a;
4. calcoli la distribuzione $\{r_j, j \in \mathrm{N}\}$ osservata dai pacchetti in arrivo, il numero medio di pacchetti nel sistema $E[N]$ ed in coda di attesa $E[N_q]$, il tempo medio di risposta del sistema $E[R]$ ed il tempo medio in coda di attesa $E[W]$ e, tramite $E[R]$ ed $E[W]$, calcoli il tempo medio di servizio b;

DOMANDA FACOLTATIVA

5. cambi la transizione con tasso β di Figura 1.1 in modo da rendere il sistema privo di perdite.

RISOLUZIONE

1. Dalla Figura 1.1 emerge chiaramente che quando il sistema si trova nello stato $\{n\}$ può verificarsi uno dei due eventi descritti di seguito.

(i) Con tasso esponenziale α il sistema transisce nello stato $\{n*\}$ per poi ritornare in $\{n\}$ con tasso esponenziale β. Mentre il sistema soggiorna nello stato $\{n*\}$ i pacchetti in arrivo vengono scartati. Inoltre, anche se il sistema contiene pacchetti, nessuno di essi viene servito. Gli stati $\{n*\}$ potrebbero corrispondere a stati in cui il pacchetto, appena arrivato, subisce una elaborazione durante la quale il router non accetta ne serve pacchetti.

(ii) Il sistema effettua le transizioni previste dal sistema M/M/1 classico sugli stati adiacenti $\{n+1\}$ ed $\{n-1\}$. Ovviamente quest'ultima transizione e' possibile se $n \geq 1$

2. Analizzando il diagramma di Figura 1.2 e' semplice scrivere le equazioni

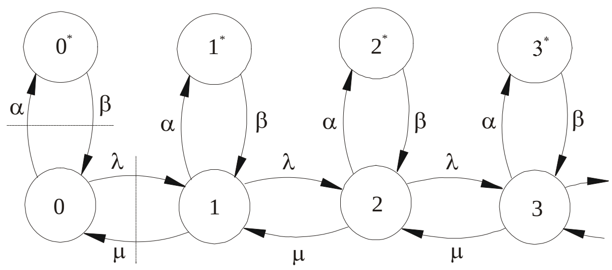

Figura 1.2: Linee di flusso

di bilanciamento locale relativamente alle linee verticali tra gli stati $\{n\}$.

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = \mu p_2 \\ \lambda p_2 = \mu p_3 \\ \dots \\ \lambda p_{n-1} = \mu p_n \end{cases} \tag{1.1}$$

Le equazioni del sistema (1.5) sono le stesse del sistema M/M/1 classico per cui

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 ,\ \forall n \in \mathrm{N} \tag{1.2}$$

Scriviamo adesso le equazioni di bilanciamento locale attraverso le linee orizzontali (v. Figura 1.2) che separano gli stati $\{n\}$ ed i corrispondenti stati $\{n^*\}$.

$$\begin{cases} \alpha p_0 = \beta p_{0^*} \\ \alpha p_1 = \beta p_{1^*} \\ \alpha p_2 = \beta p_{2^*} \\ \ldots \\ \alpha p_n = \beta p_{n^*} \end{cases} \tag{1.3}$$

Sostituendo la (1.2) nella generica equazione del sistema (1.3)

$$p_{n^*} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) p_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 ,\ \forall n \in \mathrm{N} \tag{1.4}$$

Com'è noto, la probabilità p_0 si ricava dalla condizione di normalizziamone, che, nel caso in esame diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (p_n + p_{n^*}) = 1 \tag{1.5}$$

Sostituendo la (1.2) e la (1.4) nella (1.5)

$$p_0\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] = 1 \tag{1.6}$$

Se vale la condizione

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1 \tag{1.7}$$

che risulta appunto la condizione di stabilita' del sistema, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \tag{1.8}$$

per cui la (1.6), dopo alcuni passaggi algebrici, conduce al seguente risultato

$$p_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 + \frac{\alpha}{\beta}} \tag{1.9}$$

Sostituendo la (1.9) nella (1.2) e nella (1.4)

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 + \frac{\alpha}{\beta}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \\ & \qquad , \forall n \in \mathrm{N} \\ p_{n^*} &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 + \frac{\alpha}{\beta}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \end{aligned} \tag{1.10}$$

Nel caso specifico in cui $\alpha = \beta$, le probabilità stazionarie di stato (1.10) si semplificano come segue

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2}(1 - \eta)\,\eta^n \\ & \qquad , \forall n \in \mathrm{N},\ \eta = \frac{\lambda}{\mu} \\ p_{n^*} &= \frac{1}{2}(1 - \eta)\,\eta^n \end{aligned} \tag{1.11}$$

3. Il sistema perde pacchetti quando si trova negli stati *asteriscati*. Di conseguenza

$$P_{Loss} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n^*} = \frac{1}{2}(1 - \eta) \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n$$

Quindi

$$P_{Loss} = \frac{1}{2} \tag{1.12}$$

Per calcolare λ_{acc} basta osservare che

$$\lambda_{acc} = (1 - P_{Loss})\lambda \tag{1.13}$$

Sostituendo la (1.12) nella (1.13)

$$\lambda_{acc} = \lambda / 2 \tag{1.14}$$

Per il calcolo del throughput dobbiamo considerare che il sistema serve pacchetti soltanto quando si trova negli stati $\{n\}$. Di conseguenza

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n p_n = \frac{\mu}{2}(1-\eta)\sum_{n=1}^{\infty} \eta^n \tag{1.15}$$

Dopo alcuni passaggi algebrici la (1.15) diventa

$$\gamma = \lambda / 2 \tag{1.16}$$

Questo risultato coincide ovviamente con il risultato (1.14) relativo al tasso con cui, all'equilibrio statistico, i pacchetti vengono accettati nel sistema.

NOTA. Per il calcolo di λ_{acc} si poteva procedere partendo dalla definizione

$$\lambda_{acc} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \lambda\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_{n*}\right) = \lambda(1 - P_{Loss}) \tag{1.17}$$

Moltiplicando entrambi i membri della (1.13) per il tempo medio di servizio b

$$\lambda_{acc} b = (1 - P_{Loss})\lambda b \tag{1.18}$$

Poiché

$$\lambda_{acc} b = \gamma b = a' \tag{1.19}$$

$$\lambda b = a \tag{1.20}$$

sostituendo la (1.19) e la (1.20) nella (1.18)

$$a' = (1 - P_{Loss})a \tag{1.21}$$

3. Poiché il tasso di ingresso non dipende dallo stato del sistema le funzioni massa di probabilità $\{r_k, k \in \mathrm{N}\}$ e $\{p_k, k \in \mathrm{N}\}$ coincidono.

Dalle (1.11) si deduce facilmente il numero medio di pacchetti in rete all'equilibrio statistico

$$E[N] = \sum_{n=1}^{\infty} n(p_n + p_{n*}) = (1-\eta)\sum_{n=1}^{\infty} n\eta^n$$

$$= (1-\eta)\eta\sum_{n=1}^{\infty} n\eta^{n-1} = \frac{\eta}{1-\eta}$$

In conclusione

$$E[N] = \frac{\eta}{1-\eta} \tag{1.22}$$

Il calcolo di $E[N_q]$ richiede un po' di attenzione. Infatti, quando il sistema è nello stato $\{n*\}$, $n > 0$, il servente è inattivo per cui gli *n* pacchetti sono in coda di attesa. Viceversa, quando il sistema è nello stato $\{n\}$, $n > 0$, il sistema serve un pacchetto per cui degli *n* pacchetti *n*-1 sono in coda di attesa

$$E[N_q] = \sum_{n=1}^{\infty} np_{n*} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_n \tag{1.23}$$

Sostituendo le probabilità (1.11) nella (1.18), dopo alcuni passaggi algebrici si ricava

$$E[N_q] = \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1+\eta}{1-\eta} \tag{1.24}$$

Per il calcolo di risposta del sistema $E[R]$ basta osservare che il numero medio di pacchetti nel sistema e' dato dalla (1.17). Poiché il throughput e' fornito dalla (1.16), applicando il risultato di Little si ottiene

$$E[R] = \frac{E[N]}{\gamma} = \frac{2}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\eta} \tag{1.25}$$

Per il calcolo di $E[W]$ si applica di nuovo il risultato di Little

$$E[W] = \frac{E[N_q]}{\gamma} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1+\eta}{1-\eta} \tag{1.26}$$

Per il calcolo del tempo medio di servizio *b* basta osservare che

$$b = E[R] - E[W] \tag{1.27}$$

Sostituendo la (1.28) e la (1.29) nella (1.27)

$$b = 1/\mu \tag{1.28}$$

Infatti, il servente è esponenziale con tasso μ per cui il tempo medio di servizio non può che essere espresso dalla (1.28).

5. Una possibilità per rendere il sistema in esame senza perdite potrebbe essere quello indicato in Figura 1.3. In un tale sistema, l'arrivo di un pacchetto nello stato $\{n^*\}$ provoca una transizione verso lo stato $\{n+1\}$.

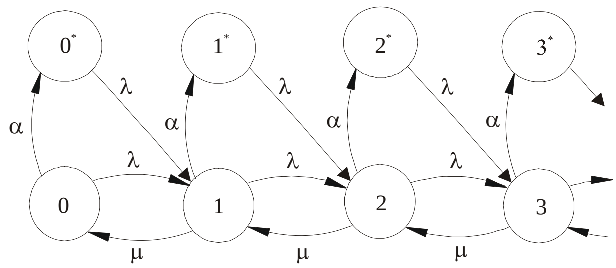

Figura 1.3: M/M/1 senza perdite