Exercise 1: Assume that a router is modelled with an M/M/1 queuing system with the state-transition-rate diagram shown in Figura 1.1. The system state

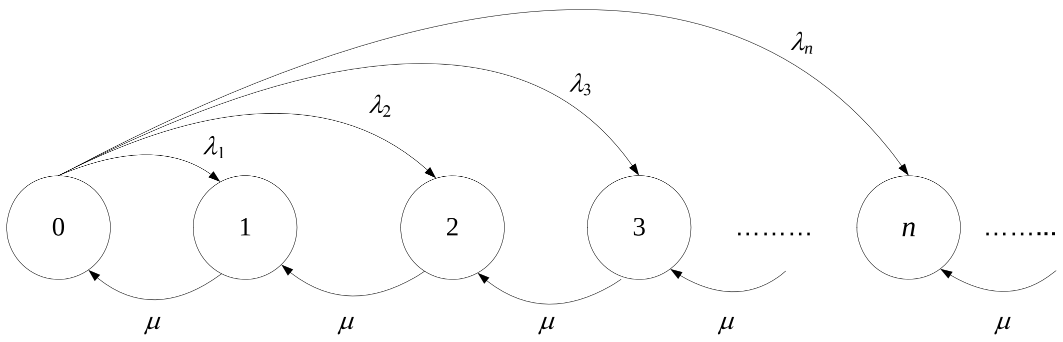

Figura 1.1State-transition-rate diagram

is given by the number of packets in the system. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ are the arrival rates of messages, conveying 1, 2, 3, ... packets respectively, while μ is the packet service rate. Instructions:

1. interpret the router's behaviour by analysing the state-transition-rate diagram;

2. write the global balance equations, determine the stability condition and, for a stable system, prove that the state steady probabilities $\{p_k, k \in \mathrm{N}\}$ are given by

$$p_k = \frac{1}{\mu}\left(\sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n\right) p_0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \;; \; p_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n\right)}$$

Furthermore, by assuming that $\lambda_n = \lambda / n^3$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, calculate

3. lthe state steady probabilities $\{p_k, k \in \mathrm{N}\}$;

4. the throughput, the carried load and the average service time by applying the corresponding definitions;

5. the packet arrival rate and the offered load.

Note: During your calculations it might be useful to recall that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n, \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = \pi/6$$

Esercizio 1: Supponiamo che un nodo di una rete a commutazione di pacchetto venga modellato mediante un sistema a coda singola M/M/1 il cui diagramma dei tassi di transizione è riportato in Figura 1.1. Lo stato del

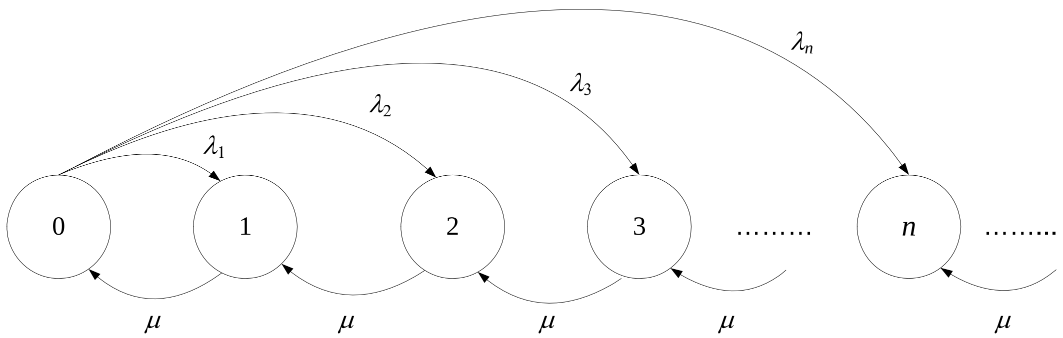

Figura 1.1: Diagramma dei tassi di transizione

sistema è rappresentato dal numero di pacchetti presenti nel sistema stesso. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ sono i tassi di arrivo dei messaggi sul commutatore contenenti, rispettivamente, uno, due, tre,.. pacchetti mentre μ è il tasso di servizio dei pacchetti. Il candidato:

1. interpreti il comportamento del commutatore a partire dal diagramma dei tassi di transizione;

2. scriva le equazioni di bilanciamento globale, determini la condizione di stabilita' e, relativamente ad un sistema stabile, dimostri che le probabilita' stazionarie di stato $\{p_k, k \in \mathrm{N}\}$ risultano

$$p_k = \frac{1}{\mu}\left(\sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n\right) p_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{1.1}$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n\right)} \tag{1.2}$$

Supponendo che $\lambda_n = \lambda / n^3$, $n = 1, 2, 3, \dots$, il candidato calcoli:

3. le probabilità stazionarie di stato $\{p_k, k \in \mathrm{N}\}$;

4. il throughput, il carried load ed il tempo medio di servizio a partire dalle rispettive definizioni;

5. il tasso di arrivo dei pacchetti e l'offered load.

NOTA. Nell' effettuare i calcoli può essere utile ricordare che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n, \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2) = \pi/6 \tag{1.3}$$

RISOLUZIONE

1. Su ricezione di un messaggio contenente uno o più pacchetti, il commutatore serve un pacchetto per volta con tasso costante μ e non accetta ulteriori messaggi. Il commutatore puo' accettare un altro messaggio solo quando l' ultimo pacchetto del messaggio in servizio è stato trasmesso.

2. Dall' analisi della Figura 1.1 risulta

$$\begin{cases} p_0\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\right) = \mu p_1 \\ \mu p_k = \lambda_k p_0 + \mu p_{k+1} \quad k \geq 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

Dalla prima equazione del sistema (1.4) si ricava

$$p_1 = \frac{1}{\mu}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\right)p_0 \tag{1.5}$$

Sostituendo la (1.5) nella equazione del sistema (1.4) con $k = 1$ si ricava

$$p_2 = \frac{1}{\mu}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\right)-\lambda_1\right]p_0 \tag{1.6}$$

Sostituendo la (1.6) nella equazione del sistema (1.4) con $k = 2$ si ricava

$$p_3 = \frac{1}{\mu}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\right)-\lambda_1-\lambda_2\right]p_0 \tag{1.7}$$

Procedendo per k successivi si ottiene

$$p_k = \frac{1}{\mu}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\right)-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_{k-1}\right]p_0, \; k \geq 2, \tag{1.8}$$

La (1.5) e la (1.8) possono essere riscritte nella seguente forma compatta

$$p_k = \frac{1}{\mu}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n\right)p_0, \; k \geq 1, \tag{1.9}$$

Per determinare p_0 si utilizza la condizione di normalizzazione $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \left[1 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n\right)\right]p_0 = 1 \tag{1.10}$$

Utilizzando la (1.3) si ottiene

$$\left[1 + \frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n\right]p_0 = 1 \tag{1.11}$$

Dalla (1.11) si evince che il sistema è stabile se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n < \infty \tag{1.12}$$

Se il sistema è stabile

$$p_0 = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n\right)\right]} \tag{1.13}$$

e quindi, dalla (1.9) segue

$$p_k = \frac{\frac{1}{\mu}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n\right)}{\left[1 + \frac{1}{\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n\right)\right]}, \quad k \geq 1 \ . \tag{1.14}$$

Risultano così dimostrate la (1.1) e la (1.2).

3. Nel caso in cui $\lambda_n = \lambda / n^3$, con $n = 1, 2, 3, \dots$, la (1.13) e la (1.14) diventano

$$p_0 = \frac{1}{\left[1 + \frac{\lambda}{\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\right]} = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{6}\rho} \tag{1.15}$$

$$p_k = \frac{\rho}{1 + \frac{\pi}{6}\rho}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^3}\right), \quad k \geq 1 \tag{1.16}$$

dove

$$\rho = \lambda/\mu \tag{1.17}$$

4. Calcolo del throughput.

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n p_n = \mu(1-p_0) = \frac{\pi}{6}\lambda \frac{1}{1+\frac{\pi}{6}\rho} \tag{1.18}$$

Calcolo del carried load a'.

$$a' = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 - p_0 = \frac{\frac{\pi}{6}\rho}{1+\frac{\pi}{6}\rho} \tag{1.19}$$

Calcolo del tempo medio di servizio *b*.

Essendo $a' = \gamma b$ si ha

$$b = \frac{a'}{\gamma} = \frac{1-p_0}{\mu(1-p_0)} = \frac{1}{\mu} \tag{1.20}$$

5. Supponiamo adesso che il processo di Figura 1.1 si trovi nello stato $\{0\}$. Poichè un messaggio che arriva con tasso λ_n trasporta *n* pacchetti, il tasso di arrivo dei pacchetti $\tilde{\lambda}$ sul commutatore risulta:

$$\tilde{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}\lambda \tag{1.21}$$

Di conseguena, l’offered load *a* vale

$$a = \tilde{\lambda} b = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\pi}{6}\rho \tag{1.22}$$

Potevamo ricavare la stessa espressione partendo dalla relazione

$$a' = (1-p_L)a = [1-(1-p_0)]a = p_0 a \tag{1.23}$$

da cui

$$a = a'/p_0 \tag{1.24}$$

Sostituendo la (1.19) e la (1.15) nella (1.24) si ottiene la (1.22). Il risultato (1.22), confrontato con quello riportato in (1.19), mostra che l'offered load ed il carried load non coincidono, risultato questo che ci dovevamo aspettare in quanto il sistema perde pacchetti.