EXERCISE 1: Consider the Markov chain reported in Figure 1.1.

1. Determine the relationship which must exist between γ and f given that the graph of Figure 1.1 is a Markov chain.
2. Discuss the nature of the Markov chain while varying the values of γ and f and, if recurrent positive, calculate the steady state probabilities.

Now assume that the transition probabilities of the above Markov chain are those indicated in Figure 1.2.

3. Discuss the nature of the Markov chain while varying the values of γ and f and, if recurrent positive, calculate the steady state probabilities

NOTE: During the computation it might be useful to remember that

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n = 2$$

ESERCIZIO 1: Si consideri il grafo riportata in Figura 1.1. Il candidato:

1. ricavi la relazione che deve esistere tra γ ed f affinché il grafo di Figura 1.1 sia una catena di Markov;
2. discuta la natura della catena e, se ricorrente positiva, ricavi le probabilità stazionarie di stato.

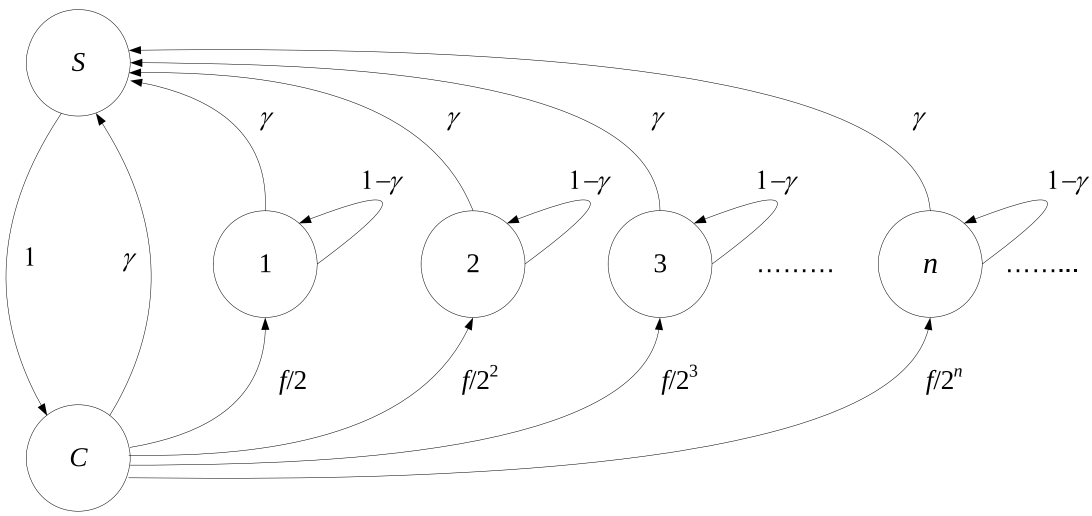

Figura 1.1: Diagramma delle probabilitàdi transizione/The state diagram of the Markov chain

Cambiamo adesso le probabilità di transizione della suddetta catena di Markov in modo da ottenere la catena riportata in Figura 1.2. Il candidato:

3. discuta la natura della catena e, se ricorrente positiva, ricavi le probabilità stazionarie di stato.

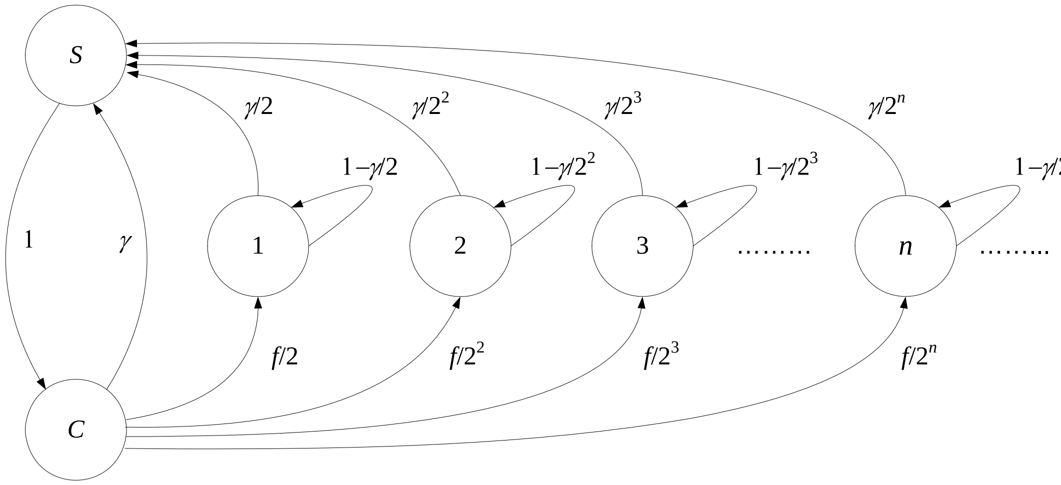

Figura 1.2: Diagramma delle probabilitàdi transizione della nuova catena di Markov/The state diagram of the new Markov chain

NOTA. Nello svolgimento dell' esercizio puo' essere utile ricordare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

RISOLUZIONE

1. La matrice delle probabilità di transizione risulta

$$P = \begin{array}{c} S \\ C \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \gamma & 0 & f/2 & f/2^2 & f/2^3 & \dots \\ \gamma & 0 & 1-\gamma & 0 & 0 & \dots \\ \gamma & 0 & 0 & 1-\gamma & 0 & \dots \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 1-\gamma & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Affinché la catena in oggetto sia una catena di Markov la matrice P deve essere stocastica. La somma di tutti gli elementi di ciascuna riga, tranne la seconda, è uno. Per la seconda riga deve dunque valere la condizione:

$$\gamma + f\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \tag{1.2}$$

ovvero

$$\gamma + f\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1\right] = 1 \tag{1.3}$$

Poiché

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \tag{1.4}$$

la (1.3) si riduce alla seguente relazione

$$\gamma + f = 1 \tag{1.5}$$

2. Studiamo di seguito la (1.5) al variare del valore dei parametreti γ ed f.

(i) $f = 0$, $\gamma = 1$

In questo caso gli stati $\{S, C\}$ sono ricorrenti positivi e periodici di periodo $\delta = 2$ mentre gli stati $\{1, 2, 3, \ldots\}$ sono transienti.

(ii) $f = 1$, $\gamma = 0$

In questo caso gli stati $\{S, C\}$ sono transienti mentre gli stati $\{1, 2, 3, \ldots\}$ sono assorbenti.

(iii) $0 < f, \gamma < 1$

In questo caso la catena é irriducibile (in quanto tutti gli stati comunicano tra di loro) ed aperiodica (in quanto gli stati $\{1, 2, 3, \ldots\}$ transiscono anche su se stessi).

Per studiare la natura della catena nel caso generale (iii) é necessario analizzare la soluzione del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P \\ \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e} = 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

dove $\boldsymbol{\pi} = [\pi_S, \pi_C, \pi_1, \pi_2, \ldots]$. Il precedente sistema può essere riscritto, in forma estesa, nel modo seguente

$$[\pi_S, \pi_C, \pi_1, \pi_2, \ldots] =$$

$$[\pi_S, \pi_C, \pi_1, \pi_2, \ldots]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \gamma & 0 & f/2 & f/2^2 & f/2^3 & \ldots \\ \gamma & 0 & 1-\gamma & 0 & 0 & \ldots \\ \gamma & 0 & 0 & 1-\gamma & 0 & \ldots \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 1-\gamma & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

$$\pi_S + \pi_C + \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = 1 \tag{1.8}$$

Effettuando il prodotto righe per colonne nella (1.7) si ottiene

$$\begin{cases} \pi_S = \gamma(\pi_C + \pi_1 + \pi_2 + \ldots) \\ \pi_C = \pi_S \\ \pi_k = \dfrac{f}{2^k}\pi_C + (1-\gamma)\pi_k \qquad \forall k \geq 1 \end{cases} \tag{1.9}$$

Dopo alcune manipolazioni algebriche, il sistema (1.9) puo' essere trasformato nel seguente

$$\begin{cases} \pi_S = \gamma(\pi_C + \pi_1 + \pi_2 + \ldots) \\ \pi_C = \pi_S \\ \pi_k = \dfrac{1}{2^k}\left(\dfrac{f}{\gamma}\right)\pi_C \qquad \forall k \geq 1 \end{cases} \tag{1.10}$$

Sostituendo $\pi_C = \pi_S$ e $\pi_k = (f/(2^k\gamma))\pi_C$ nella (1.8)

$$\pi_C\left[2 + \frac{f}{\gamma}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right] = 1 \tag{1.11}$$

Quindi, nel caso $0 < f, \gamma < 1$, la (1.11) ammette per $\pi_C = \pi_S$ una soluzione finita. Di conseguenza, per $0 < f, \gamma < 1$, la catena è infinita, aperiodica, irriducibile e ricorrente positiva. Sostituendo la (1.4) nella (1.11) otteniamo

$$\pi_C = \frac{1}{2 + \frac{f}{\gamma}} = \frac{\gamma}{2\gamma + f} = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \tag{1.12}$$

L' ultimo passaggio é una conseguenza della (1.5). Sostituendo la (1.12) nelle equazioni del sistema (1.10) si perviene al risultato richiesto

$$\pi_C = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \tag{1.13}$$

$$\pi_S = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \tag{1.14}$$

$$\pi_k = \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}\right)\frac{1}{2^k}, \ \forall k \geq 1 \tag{1.15}$$

In conclusione, per $0 < f, \gamma < 1$ le probabilità stazionarie di stato sono date da (1.13), (1.14) e (1.15).

3. La matrice delle probabilitàdi transizione per la nuova catena di Markov risulta

$$P = \begin{array}{c} S \\ C \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \gamma & 0 & f/2 & f/2^2 & f/2^3 & \dots \\ \gamma/2 & 0 & 1 - \gamma/2 & 0 & 0 & \dots \\ \gamma/2^2 & 0 & 0 & 1 - \gamma/2^2 & 0 & \dots \\ \gamma/2^3 & 0 & 0 & 0 & 1 - \gamma/2^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Affinché P sia stocastica, i parametri γ ed f debbono soddisfare la condizione vista precedentemente: $\gamma + f = 1$. Inoltre é semplice verificare che anche per la catena di Markov in esame valgono le considerazioni (i) e (ii) viste precedentemente per la catena di Markov con P data da (1.1). La situazione é invece diversa nel caso generale (iii) in cui $0 < f, \gamma < 1$. Per studiare la natura della catena nel caso generale (iii) é necessario analizzare la soluzione del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P \\ \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e} = 1 \end{cases} \tag{1.17}$$

dove $\boldsymbol{\pi} = [\pi_S, \pi_C, \pi_1, \pi_2, \ldots]$. Il precedente sistema puo' essere riscritto, in forma estesa, nel modo seguente

$$[\pi_S, \pi_C, \pi_1, \pi_2, \ldots] =$$

$$[\pi_S, \pi_C, \pi_1, \pi_2, \ldots] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \gamma & 0 & f/2 & f/2^2 & f/2^3 & \ldots \\ \gamma/2 & 0 & 1-\gamma/2 & 0 & 0 & \ldots \\ \gamma/2^2 & 0 & 0 & 1-\gamma/2^2 & 0 & \ldots \\ \gamma/2^3 & 0 & 0 & 0 & 1-\gamma/2^3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

$$\pi_S + \pi_C + \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = 1 \tag{1.19}$$

La (1.18), in forma estesa, equivale a

$$\begin{cases} \pi_S = \gamma \pi_C + \dfrac{\gamma}{2}\pi_1 + \dfrac{\gamma}{2^2}\pi_2 + \dfrac{\gamma}{2^3}\pi_3 + \ldots \\ \pi_C = \pi_S \\ \pi_k = \dfrac{f}{2^k}\pi_C + \left(1 - \dfrac{\gamma}{2^k}\right)\pi_k & \forall k \geq 1 \end{cases} \tag{1.20}$$

Dopo alcune manipolazioni algebriche, il sistema (1.20) può essere trasformato nel seguente sistema

$$\begin{cases} \pi_S = \gamma \pi_C + \dfrac{\gamma}{2}\pi_1 + \dfrac{\gamma}{2^2}\pi_2 + \dfrac{\gamma}{2^3}\pi_3 + \ldots \\ \pi_C = \pi_S \\ \pi_k = \dfrac{f}{\gamma}\pi_C & \forall k \geq 1 \end{cases} \tag{1.21}$$

Sostituendo $\pi_C = \pi_S$ e $\pi_k = (f/\gamma)\pi_C$ nella (1.19)

$$\pi_C\left[2 + \frac{f}{\gamma}\sum_{k=1}^{\infty} 1\right] = 1 \tag{1.22}$$

Poiché

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty \tag{1.23}$$

si deduce che la catena in esame non è ricorrente positiva in quanto il sistema (1.17) non ha soluzione (non esistono cioè le probabilità stazionarie di stato). Per studiare la natura della catena bisogna allora studiare la soluzione del sistema

$$\mathbf{h} = Q\mathbf{h} \tag{1.24}$$

dove Q é la matrice che si ottiene dalla matrice (1.16) sopprimendo una qualunque riga e la corrispondente colonna. Sopprimendo la prima riga e la prima colonna dalla (1.16), il sistema (1.24) risulta

$$\begin{bmatrix} h_C \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f/2 & f/2^2 & f/2^3 & f/2^4 & \dots \\ 0 & 1-\gamma/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-\gamma/2^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1-\gamma/2^3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\gamma/2^4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_C \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ \dots \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

Dalla (1.25) si ottiene

$$\begin{cases} h_C = \dfrac{f}{2}h_1 + \dfrac{f}{2^2}h_2 + \dfrac{f}{2^3}h_3 + \dots \\ h_k = (1-\gamma/2^k)h_k \qquad \forall k \geq 1 \end{cases} \tag{1.26}$$

Poiché $\gamma \neq 0$, da $h_k = (1-\gamma/2^k)h_k$, per $\forall k \geq 1$ segue $h_k = 0$, $\forall k \geq 1$, e quindi dalla prima equazione del sistema (1.26) $h_C = 0$. Pertanto, l'unica soluzione possibile per il sistema (1.26) è quella identicamente nulla con la conseguenza che la catena in esame è ricorrente. Non potendo essere ricorrente positive, la catena risulta allora ricorrente nulla.