

**Appello del 20/01/2012**

ESERCIZIO 1: Un commutatore di una rete a pacchetto viene modellato mediante un sistema a coda M/M/1 nel quale i pacchetti arrivano con tasso  $\lambda_n = (n + 1)\lambda$ ,  $n \geq 0$ , e vengono serviti con tasso  $\mu_n = (n + 1)\mu$ ,  $n \geq 1$ , dove  $n$  rappresenta il numero di pacchetti nel sistema. Il candidato:

1. disegni il diagramma dei tassi di transizione;
2. ricavi la condizione di stabilità del sistema e, per un sistema stabile, le probabilità stazionarie di stato utilizzando le equazioni di bilanciamento locale;
3. calcoli il numero medio di pacchetti nel sistema  $E[N]$  ed in coda di attesa  $E[N_q]$ , il tasso “medio” complessivo  $\bar{\lambda}$  dei pacchetti in ingresso al sistema a coda, il throughput  $\gamma$ , la distribuzione  $\{r_j, j \in \mathbb{N}\}$  osservata dai pacchetti in arrivo.

NOTA. Nel corso degli sviluppi algebrici necessari allo svolgimento dell’esercizio può essere utile ricordare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x), \quad 0 < x < 1 \quad (1.1)$$

**RISOLUZIONE**

1. Il diagramma dei tassi di transizione è illustrato in Figura 1.1.

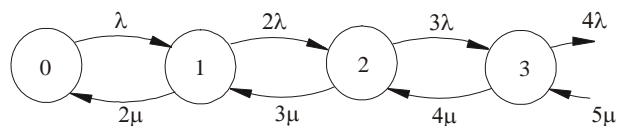


Figura 1.1: Diagramma dei tassi di transizione

2. Le equazioni di bilanciamento locale risultano

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda p_0 = 2\mu p_1 \\ 2\lambda p_1 = 3\mu p_2 \\ 3\lambda p_2 = 4\mu p_3 \\ \dots \\ (k+1)\lambda p_k = (k+2)\mu p_{k+1} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Per  $k = 0$ , dal sistema (1.2) si ha

$$p_1 = \frac{\lambda}{2\mu} p_0 \quad (1.3)$$

mentre per  $k = 1$

$$p_2 = \left(\frac{2\lambda}{3\mu}\right) p_1 \quad (1.4)$$

Sostituendo la (1.3) nella (1.4)

$$p_2 = \left(\frac{2\lambda}{3\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right) p_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 \quad (1.5)$$

Per  $k = 2$ , dal sistema (1.2) e dalla (1.5) si ha

$$p_3 = \left(\frac{3\lambda}{4\mu}\right) p_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \quad (1.6)$$

In generale si ha

$$p_k = \frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.7)$$

Ponendo per brevità

$$\alpha = \lambda/\mu \quad (1.8)$$

la (1.7) può essere riscritta

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k+1} p_0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.9)$$

Come è noto, la probabilità  $p_0$  si ricava dalla condizione di normalizzazione  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ . Quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k+1} p_0 = 1 \quad (1.10)$$

La (1.10) può essere trasformata come segue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k+1} p_0 = \frac{p_0}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1}}{k+1} = \frac{p_0}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k} \quad (1.11)$$

Dalla (1.11) segue anche la condizione di stabilità. Infatti se  $\alpha < 1$ , ossia se  $\lambda < \mu$  la serie che compare nella (1.11) converge e dalla (1.1) abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} = -\log(1-\alpha) \quad (1.12)$$

Sostituendo la (1.12) nella (1.11), e quest'ultima nella (1.10) si ottiene

$$p_0 = -\frac{\alpha}{\log(1-\alpha)} \quad (1.13)$$

Sostituendo la (1.13) nella (1.9) si ottiene,

$$p_k = -\frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)\log(1-\alpha)}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.14)$$

3. Dalle (1.14) si deduce facilmente il numero medio di pacchetti in rete all'equilibrio statistico

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = -\frac{1}{\log(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \alpha^{k+1} \\ &= -\frac{1}{\log(1-\alpha)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right) \alpha^k = -\frac{1}{\log(1-\alpha)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \alpha^k \\ &= -\frac{1}{\log(1-\alpha)} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^k - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k} \right\} \\ &= -\frac{1}{\log(1-\alpha)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k - \alpha - 1 - \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k} - \alpha \right] \right\} \quad (1.15) \end{aligned}$$

Dopo semplici passaggi algebrici sulla (1.15) si perviene al risultato richiesto

$$E[N] = -1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)\log(1-\alpha)} \quad (1.16)$$

$E[N_q]$  si può calcolare in maniera analoga ad  $E[N]$ . Infatti

$$E[N_q] = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)p_k = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k - \sum_{k=1}^{\infty} p_k = E[N] - (1-p_0) \quad (1.17)$$

Sostituendo la (1.16) e la (1.13) nella (1.17), dopo alcuni passaggi algebrici si perviene al seguente risultato

$$E[N_q] = -2 - \frac{\alpha(2-\alpha)}{(1-\alpha)\log(1-\alpha)} \quad (1.18)$$

Per il calcolo del tasso complessivo  $\bar{\lambda}$  in ingresso al sistema si procede partendo dalla definizione

$$\bar{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k p_k \quad (1.19)$$

Tenendo conto della struttura dei tassi di arrivo

$$\bar{\lambda} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)p_k = \lambda(E[N] + 1) \quad (1.20)$$

Sostituendo la (1.16) nella (1.20), dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$\bar{\lambda} = -\frac{\lambda\alpha}{(1-\alpha)\log(1-\alpha)} \quad (1.21)$$

Anche per calcolare il throughput  $\gamma$  si parte dalla definizione

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k p_k \quad (1.22)$$

Tenendo conto che  $\mu_n = (n+1)\mu$  la (1.22) può essere riscritta

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} (n+1)\mu p_k = \mu\{E[N] + (1-p_0)\} \quad (1.23)$$

Sostituendo la (1.16) e la (1.13) nella (1.23), dopo alcuni passaggi algebrici si perviene al seguente risultato atteso (in quanto il sistema non perde pacchetti)

$$\gamma = \bar{\lambda} = \frac{\lambda \alpha}{(1 - \alpha) \log(1 - \alpha)} \quad (1.24)$$

Dalla teoria e' noto che

$$r_j = \frac{\lambda_j p_j}{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k p_k} = \frac{\lambda_j p_j}{\bar{\lambda}}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (1.25)$$

Utilizzando la struttura dei tassi di arrivo, la (1.14) e la (1.21), dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$r_j = (1 - \alpha) \alpha^j, \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (1.26)$$

Dal confronto della (1.14) con la (1.26) risulta che le funzioni massa di probabilita'  $\{r_k, k \in \mathbb{N}\}$  e  $\{p_k, k \in \mathbb{N}\}$  differiscono tra loro. Questo risultato era prevedibile in quanto il tasso di arrivo dei pacchetti sul commutatore dipende dallo stato del (numero di pacchetti presenti nel) sistema per cui il teorema PASTA non è applicabile.

ESERCIZIO 2: Si consideri l'autonomous system strutturato in due aree (Area 0 e Area 10) illustrato in Figura 2.1. Supponiamo che il link di collegamento tra R2 ed R4 e che le LIS direttamente collegate a R4 siano annunciate nell'Area 10 attraverso R2 e supponiamo infine che non venga fatta aggregazione. Facendo riferimento alle informazioni riportate in Figura 2.1 e alla Figura 2.2 che specifica il *Router ID* associato ai vari router contenuti nell'autonomous system, il candidato:

1. specifichi la struttura del pacchetto di *HELLO* che R1 trasmette nell'Area 10 quando ciascun router dell'area ha riconosciuto tutti gli altri;
2. specifichi la struttura del *Router LSA* e del *Network LSA* che R1 propaga nell'Area 10;
3. specifichi l'*ABR Summary LSA* e gli *ASBR Summary LSA* che R3 propaga nella *Backbone Area*;
4. specifichi l'*AS External LSA* generato da R2;
5. specifichi la struttura della *Routing Table* di R6;
6. specifichi la struttura del Link State Database (LSDB) di R3 per quanto riguarda l'Area 10.

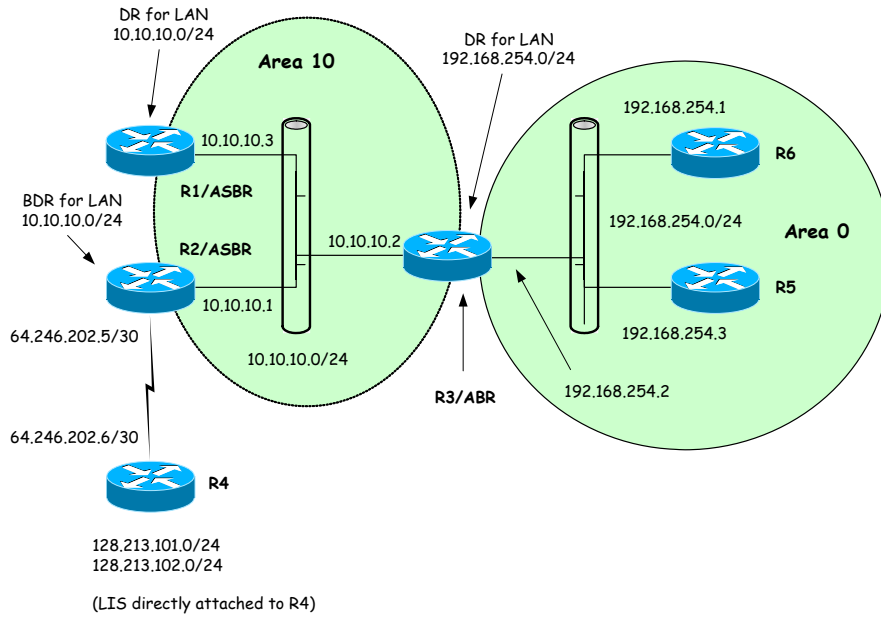


Figura 2.1: Interconnessione degli autonomous systems

Figura 2.2: Router ID dei router contenuti nell'AS

Supponiamo adesso che il link di collegamento tra R2 ed R4 e che le LIS direttamente collegate a R4 vengano incluse nell'Area 10. Il candidato:

- specifichi in che modo l'LSDB di R3 (relativamente all'Area 10) viene modificato rispetto all'LSDB della domanda precedente.

NOTA. Il candidato giustifichi opportunamente ogni risposta fornita.

RISOLUZIONE

- La struttura del pacchetto di HELLO trasmesso da R1 nell'Area 10 è

IP Packet Header	
Source IP Address	10.10.10.3
Destination IP Address	224.0.0.5

Common OSPF Header	
Type	1
Router ID	10.10.20.1
Area ID	0.0.0.10

HELLO Packet Body	
Network Mask	/24
DR	10.10.10.3
Backup DR	10.10.10.1
Neighbour (1)	10.10.20.2
Neighbour (2)	192.168.252.2

Figura 2.3: HELLO Packet trasmesso da R1

riportata nella Figura 2.3.

- La Figura 2.4 e la Figura 2.5 illustrano rispettivamente le informazioni del *Router LSA* e del *Network LSA* che R1 propaga nell'Area 10.
- La Figura 2.6 e la Figura 2.7 illustrano rispettivamente le informazioni dell'*ABR Summary LSA* e dell'*ASBR Summary LSA* che R3 propaga nell'Area 0 nei casi in cui non venga fatta aggregazione.
- La Figura 2.8 illustra gli *AS External LSA* generati da R2.

Link State Header	
LS Type = 1	This is a router LSA
Link State ID = 10.10.20.1	Router ID of R1
Advertising Router = 10.10.20.1	Router ID of R3
Bit E = 1	This is an ASBR
Bit B = 0	This is not an ABR
# Links = 1	

Link State Data	
Link ID = 10.10.10.3	IP address of the DR
Link Data = 10.10.10.3	Interface address of this router
Link Type = 2	This is a broadcast network

Figura 2.4: Router LSA generato da R1 nell'Area 10

Link State Header	
LS Type = 2	This is a Network LSA
Link State ID = 10.10.10.3	IP interface address of DR
Advertising Router = 10.10.20.1	Router ID of DR

Link State Data	
Network mask = 255.255.255.0	
Attached Router = 10.10.20.1	
Attached Router = 10.10.20.2	
Attached Router = 192.168.252.2	

Figura 2.5: Network LSA generato da R1 nell'Area 10

5. La Figura 2.9 illustra la struttura della *Routing Table* di R6.
6. Il *Link State Database* di R3 è illustrato in Figura 2.10. Da notare l'assenza di *ASBR Summary LSA*. Infatti R1 ed R2 non generano LSA di tipo 4 per annunciarsi come *AS Boundary Routers* dal momento che questa funzione viene propagata nell'Area 10 dai relativi *Router LSA*.



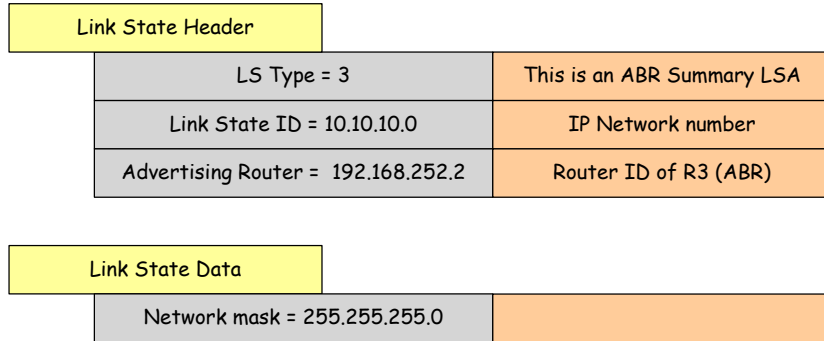


Figura 2.6: ABR Summary LSA che R3 genera nell'Area 0

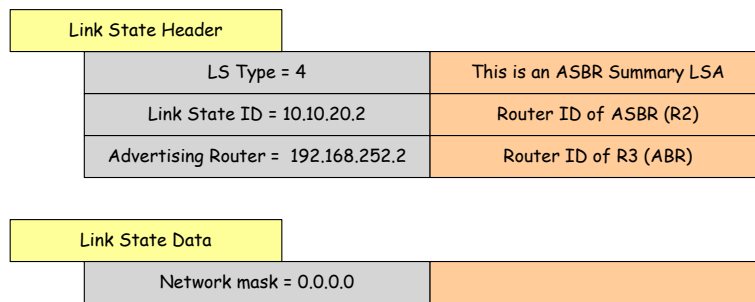
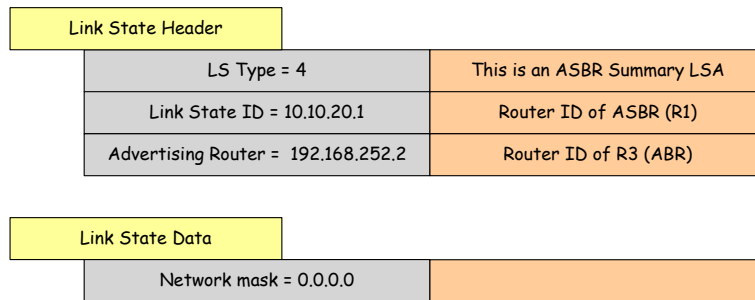


Figura 2.7: ASBR Summary LSA che R3 genera nell'Area 0

7. Il *Link State Database* di R3 (relativamente all'Area 10) viene modificato rispetto all'LSDB della domanda precedente come illustrato in Figura 2.11. Gli *External LSA* vengono rimossi mentre viene aggiunto un ulteriore *Router LSA*.

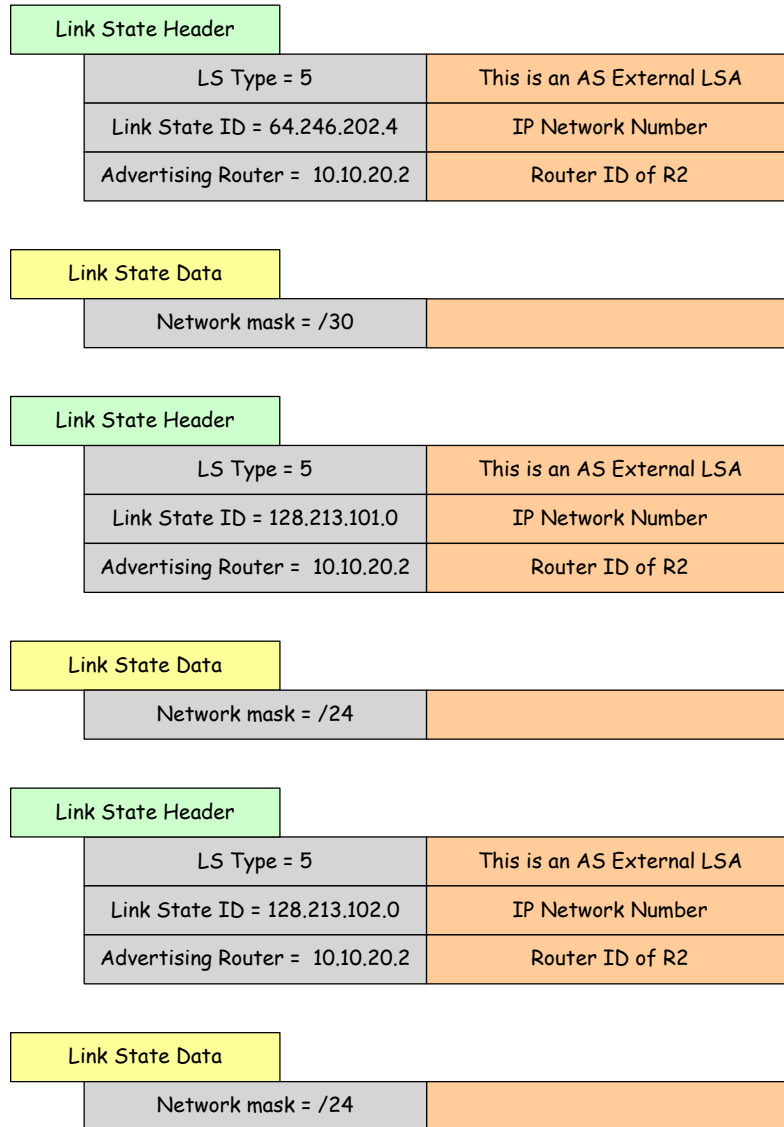


Figura 2.8: AS External LSA generato da R2

Network Prefix	Next Hop
192.168.254.0/24	directly connected
10.10.10.0/24	192.168.254.2
64.246.202.4/30	192.168.254.2
128.213.101.0/24	192.168.254.2
128.213.102.0/24	192.168.254.2

Figura 2.9: *Routing Table* di R6

LS Type	Link State ID	Adv Router	Link ID	Link Data	Type
Router LSA	10.10.20.1	10.10.20.1	10.10.10.3	10.10.10.3	2
Router LSA	10.10.20.2	10.10.20.2	10.10.10.3	10.10.10.1	2
Router LSA	192.168.252.2	192.168.252.2	10.10.10.3	10.10.10.2	2
Network LSA	10.10.10.3	10.10.20.1			
Sum Net LSA	192.168.254.0	192.168.252.2			
Extrn LSA	64.246.202.4	10.10.20.2			
Extrn LSA	128.213.101.0	10.10.20.2			
Extrn LSA	128.213.102.0	10.10.20.2			

Figura 2.10: *Link State Database* di R3

LS Type	Link State ID	Adv Router	Link ID	Link Data	Type
Router LSA	10.10.20.1	10.10.20.1	10.10.10.3	10.10.10.3	2
Router LSA	192.168.252.2	192.168.252.2	10.10.10.3	10.10.10.2	2
Router LSA	10.10.20.2	10.10.20.2	10.10.10.3	10.10.10.1	2
			10.10.20.3	64.246.202.5	1
			64.246.202.4	/30	3
Router LSA	10.10.20.3	10.10.20.3	10.10.20.2	64.246.202.6	1
			64.246.202.4	/30	3
			128.213.101.0	/24	3
			128.213.102.0	/24	3
Network LSA	10.10.10.3	10.10.20.1			
Sum Net LSA	192.168.254.0	192.168.252.2			

Figura 2.11: LSDB di R3 con l'Area 10 estesa



